

Αγγελίνα Βιδάλη

ΑΝΟΙΧΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΦΑΝΤΑΣΙΑ

Εργασία στα πλαίσια του μαθήματος : ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΑ Ι



Επιβλέπουσα καθηγήτρια: κ. Ευγενία Μελετέα

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ ΤΜΗΜΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Χειμερινό εξάμηνο έτους: 1999-2000

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	σελ. 1
Κεφάλαιο 1: ΑΝΟΙΧΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ.....	σελ. 2
1.1 ΑΝΟΙΧΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ.....	σελ. 2
1.2 ΣΩΚΡΑΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ.....	σελ. 5
1.3 ΠΟΤΕ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΧΡΗΣΗΜΟΠΟΙΗΘΕΙ.....	σελ. 5
1.4 ΣΚΟΠΟΙ ΠΟΥ ΕΞΥΠΗΡΕΤΕΙ - ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΠΟΥ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΕΧΕΙ.....	σελ. 8
1.5 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕ ΤΥΠΙΚΗ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ.....	σελ. 9
Κεφάλαιο 2: ΑΠΗΧΗΣΗ ΣΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΕΣ.....	σελ. 11
Κεφάλαιο 3: Η ΣΧΕΣΗ ΤΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΩΝ ΜΕ ΤΟ ΑΝΟΙΧΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ.....	σελ. 13
Κεφάλαιο 4: ΑΝΤΙΘΕΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΓΛΩΣΣΙΚΗΣ ΑΝΤΙΛΗΨΗΣ.....	σελ. 15
Κεφάλαιο 5: ΦΑΝΤΑΣΙΑ.....	σελ. 17
ΣΧΕΣΗ ΑΝΟΙΧΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΦΑΝΤΑΣΙΑΣ.....	σελ. 19
Κεφάλαιο 6: ΕΥΡΕΤΙΚΗ- ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΝΕΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ...σελ. 21	
6.2 ΦΙΛΟΣΟΦΙΑ ΤΗΣ ΑΜΦΙΣΒΗΤΗΣΗΣ.....	σελ. 22
6.3 ΟΙ ΝΟΗΤΙΚΕΣ ΚΑΙ ΨΥΧΟΛΟΓΙΚΕΣ ΔΙΕΡΓΑΣΙΕΣ ΜΙΑΣ ΑΝΚΑΛΥΨΗΣ ΚΑΙ Η ΣΧΕΣΗ ΤΟΥΣ ΜΕ ΤΟ ΑΝΟΙΧΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΚΑΙ ΤΗ ΦΑΝΤΑΣΙΑ.....	σελ. 23
Κεφάλαιο 7: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΚΑΘΗΜΕΡΙΝΟΤΗΤΑ.....	σελ. 25
ΕΠΙΛΟΓΟΣ	

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους καθηγητές που δέχτηκαν να συμμετάσχουν στη έρευνα για την πολύτιμη συμβολή τους.

Το σχέδιο του εξωφύλλου ανήκει στον Vassili Kandinski: Improvisation 19 (έτος 1911).

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

"Ένας καθηγητής μαθηματικών έχει μια μεγάλη ευκαιρία. Αν γεμίζει τον χρόνο που του αναλογεί εκγυμνάζοντας τους μαθητές του με ασκήσεις ρουτίνας σκοτώνει το ενδιαφέρον τους παρακωλύοντας την πνευματική τους ανάπτυξη, και κάνει λάθος χρήση της ευκαιρίας του. Αν όμως προκαλεί την περιέργεια των μαθητών βάζοντας προβλήματα ανάλογα με τις γνώσεις τους και τους βοηθάει να τα λύσουν παρακινώντας τους με ερωτήσεις μπορεί να μεταδώσει την επιθυμία, και κάποια μέσα, για αυτόνομη σκέψη." γράφει ο G.Polya στον πρόλογο του βιβλίου του "How to solve it".

Πιστεύοντας ότι η αυτόνομη σκέψη και η φαντασία είναι χαρακτηριστικά, που αν και αναγκαία για την γενικότερη ισορροπία του ατόμου αλλά και την ικανότητα να δημιουργήσει κάτι νέο, είναι άδικα υποβαθμισμένα στη σύγχρονη εκπαίδευση και κοινωνία, επιλέξαμε το παρόν θέμα. Η εργασία αποτελεί μια προσπάθεια ανάλυσης των εννοιών του ανοιχτού προβλήματος και της φαντασίας σε συνάρτηση μεταξύ τους και με τις συνθήκες που επικρατούν στην εκπαιδευτική πραγματικότητα. Σημαντική βοήθεια αποτελεί και η γνώμη των καθηγητών όπως αποτυπώθηκε σε σχετική έρευνα.

Εδιαφέρουσες βρήκαμε και διάφορες προεκτάσεις του ανοιχτού προβλήματος και της φαντασίας όπως τη δημιουργία νέων μαθηματικών και την σχέση τους με την καθημερινότητα.

ΑΝΟΙΧΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

1.1 ΑΝΟΙΧΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Σε λεξικό βρήκαμε μια ερμηνεία της λέξης πρόβλημα με την ευρύτερή της σημασία:

ζήτημα που προβάλλεται για λύση/ κάθε ζήτημα που για τη λύση του παρουσιάζονται δυσχέρειες

Ένας ειδικότερος τώρα ορισμός του μαθηματικού προβλήματος με την κλασσική του σημασία να είναι ο εξής.

Χαρακτηρίζεται ως πρόβλημα στα μαθηματικά κάθε πρόταση, με την οποία δίδονται μερικά στοιχεία (τα δεδομένα του προβλήματος) και ζητείται να οριστούν απ' αυτά μερικά στοιχεία οι άγνωστοι του προβλήματος), που περιγράφονται έμμεσα από την πρόταση.

Έστω ένα πρόβλημα π , Δ το σύνολο των δεδομένων και X το σύνολο των ζητούμενων του. Έστω ότι έγινε κατορθωτό να οριστεί ένα σύνολο X_1 , που ικανοποιεί το πρόβλημα π . Το X_1 λέμε ότι είναι μια λύση του προβλήματος π . Τα δεδομένα, όπως και τα ζητούμενα, ενός π μπορεί να είναι οποιαδήποτε "μαθηματικά αντικείμενα", π.χ. αριθμοί, σύνολα σχήματα, σχέσεις, εξισώσεις, ιδιότητες κλπ

Έστω ένα πρόβλημα π , δημιουργούνται τότε απ' αυτό τρία άλλα προβλήματα:

- 1. Το πρόβλημα π έχει λύση;*
- 2. Το πρόβλημα π έχει μια μόνο λύση;*
- 3. Αν υπάρχουν λύσεις του προβλήματος π , να οριστούν.*

Το ανοιχτό πρόβλημα αν και ως όρος ίσως δεν είναι ευρύτερα διαδεδομένος δεν παύει να είναι ένα μαθηματικό πρόβλημα, έχει όμως κάποιες αισθητές ιδιαιτερότητες.

Έτσι ενώ το "κλασικό πρόβλημα" είναι αυστηρά καθορισμένο και έχουν συνήθως βρεθεί μια ή περισσότερες λύσεις του, το ανοιχτό πρόβλημα είναι πολύ πιο ρευστό και εναποτίθεται σ' αυτόν που θα επιχειρήσει να το λύσει όχι μόνο ο τρόπος της λύσης και της διερεύνησης αλλά και ο τελικός καθορισμός των δεδομένων και των ζητούμενων. Έτσι μπορεί μια πρόταση που θα δοθεί ως ανοιχτό πρόβλημα να χρειάζεται να γίνει ειδικότερη ή να γενικευτεί ώστε να φτάσουμε σε μια απόδειξή της. Έτσι σε αντίθεση με το "κλασικό πρόβλημα" στο ανοιχτό πρόβλημα παίζει σημαντικό ρόλο εκτός από την ικανότητα λογικής και πλήρους απόδειξης μιας πρότασης και η ικανότητα διατύπωσης ευθύβολων εικασιών γενικεύοντας ή ειδικεύοντας κάθε φορά μια πρόταση και στηρίζοντάς την σε βοηθητικά λήμματα. Μιά ακόμη κρίσιμη διαφορά είναι ότι αν στο ανοιχτό πρόβλημα βρεθεί τελικά μια λύση το επόμενο βήμα είναι η προσεκτική εξέτασή της:

- Μπορείτε να επαληθεύσετε το αποτέλεσμα; Μπορείτε να επιβεβαιωθείτε για το επιχείρημα;
- Μπορείτε να φτάσετε στο συμπέρασμα με διαφορετικό τρόπο; Μπορείτε να το δείτε εποπτικά;
- Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τη μέθοδο, ή το αποτέλεσμα, για κάποιο άλλο πρόβλημα;

Ίσως μερικά απλά παραδείγματα να ήταν κατατοπιστικότερα για την φύση του ανοιχτού προβλήματος.

Τα δύο αυτά παραδείγματα δίνονται αυτούσια όπως δημοσιεύτηκαν στα περιοδικά της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρίας: Ευκλείδη Α' και Β' και θα μπορούσαν να αποτελέσουν απλά και κατατοπιστικά παραδείγματα ανοιχτού προβλήματος παραθέτονται δε μαζί με κάποια εξίσου ενδιαφέροντα σχόλια:

.....

..

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η αναλογία του ανοιχτού προβλήματος ως εργαλείου για την διδασκαλία και την κατανόηση των μαθηματικών με ανάλογες διαδικασίες που ακολουθούνται σε μαθήματα πολύ διαφορετικής φύσεως όπως π.χ. κατά την ανάλυση ενός κειμένου, την διδασκαλία ενός κανόνα της γραμματικής ή του συντακτικού την ετυμολογία μιας λέξης. Στη δε φυσική, μια επιστήμη, πολύ στενά συνδεδεμένη με τα μαθηματικά, μπορεί να τεθεί ένα ανοιχτό πρόβλημα όχι μόνο σχετικά με τα μαθηματικά εργαλεία που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την περιγραφή ενός φυσικού φαινομένου, αλλά και σχετικά με τον προσδιορισμό μιας έννοιας και την εμπειρική και διαισθητική αλλά και πειραματική προσέγγιση ενός φυσικού νόμου. Η βασική όμως διαφορά των δύο αυτών ευρύτερων τομέων του επιστητού έγκειται στο γεγονός ότι στα μαθηματικά πέρα από τα πειραματικά δεδομένα και την υποκειμενική αντίληψη των πραγμάτων υπάρχει μια ανώτερη αυθεντία(;): η αυστηρή απόδειξη.

Το ενδιαφέρον σ' αυτή την παρατήρηση μπορεί να γενικευτεί στο συμπέρασμα ότι το ανοιχτό πρόβλημα ως γενικότερη διαδικασία σκέψης δεν περιορίζεται μόνο στα μαθηματικά αλλά μπορούμε να το συναντήσουμε όχι μόνο σε άλλες επιστήμες αλλά και στην καθημερινή ζωή. Θα πρέπει μάλιστα να επισημάνουμε ότι αυτό που συναντάται σπανιότερα ίσως είναι το κλασικό μαθηματικό πρόβλημα που αποτελεί ίσως μια εξιδανικευμένη και κατασκευασμένη μορφή του ανοιχτού προβλήματος.

Τέλος μέσω του ανοιχτού προβλήματος ο μαθητής -αλλά γιατί όχι και ο καθηγητής- προσεγγίζει και βιώνει την εμπειρία και τον ενθουσιασμό μιας ανακάλυψης, της αρχικής άγνοιας και την αέναη προσπάθεια του ανθρώπου να βάλει τάξη στο χάος. Μας δίνεται λοιπόν η δυνατότητα να γνωρίσουμε τα μαθηματικά "in status nascendi", στη διαδικασία της δημιουργίας κάτι που ελάχιστες φορές μας το επιτρέπει η συνήθης παρουσίαση τους.

1.2 ΣΩΚΡΑΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ

Η διαδικασία προσέγγισης ενός νέου θεωρητικού ζητήματος μέσω του ανοιχτού προβλήματος έχει σίγουρα στενή σχέση με τη λεγόμενη "σωκρατική" ή "μαιευτική" μέθοδο. Βασίζεται στην πεποίθηση πως ο κάθε άνθρωπος αν οδηγηθεί με τις κατάλληλες ερωτήσεις μπορεί να βρεί ο ίδιος την "αλήθεια". Ο καθηγητής που ζητά απ' τους μαθητές του να επεξεργαστούν ένα ανοιχτό πρόβλημα ελπίζει ή και πιστεύει πως η λύση του δεν είναι απροσπέλαστη απ' αυτούς. Ακόμη και εάν δεν σταθούν ικανοί να φτάσουν στη λύση μπορούν να την προσεγγίσουν και να τη διερευνήσουν.

Η διαφορά με τους Σωκρατικούς διαλόγους είναι ότι η απάντηση που ζητείται από τον μαθητή δεν είναι ούτε τόσο αυτονόητη ούτε και δεδομένη.

1.3 ΠΟΤΕ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΗΘΕΙ

Και πως λοιπόν μπορώ να χρησιμοποιήσω στο μάθημά μου το ανοιχτό πρόβλημα; Θα ρώτούσαν πολλοί καθηγητές. Σε ορισμένο βαθμό οι περισσότεροι το έχουν κάποιες φορές χρησιμοποιήσει.

Όταν παρουσιάζουν ένα καινούριο θεώρημα συχνά θέτουν έστω και τυπικά την ερώτηση "Τί νομίζετε εσείς ότι ισχύει;" Μπορεί να μην περιμένουν κάποια απάντηση,

ίσως απλά να ελπίζουν ότι οι μαθητές τους θα δώσουν περισσότερη προσοχή ακούγοντας μια ερώτηση που απευθύνεται στην δική τους κρίση. Αρκετές φορές κάποιος μαθητής θα τολμήσει να εκφέρει μια άποψη και ίσως τότε και άλλοι θα τον ακολουθήσουν. Είναι αρκετά σπάνιο όμως οι εικασίες των μαθητών να συναντήσουν το ζητούμενο θεώρημα, τις περισσότερες φορές απαιτείται η ικανότητα του καθηγητή να συνδυάσει τις διάφορες απόψεις και να προσεγγίσει πιά μέσα απ' αυτές το αντικείμενο του μαθήματος.

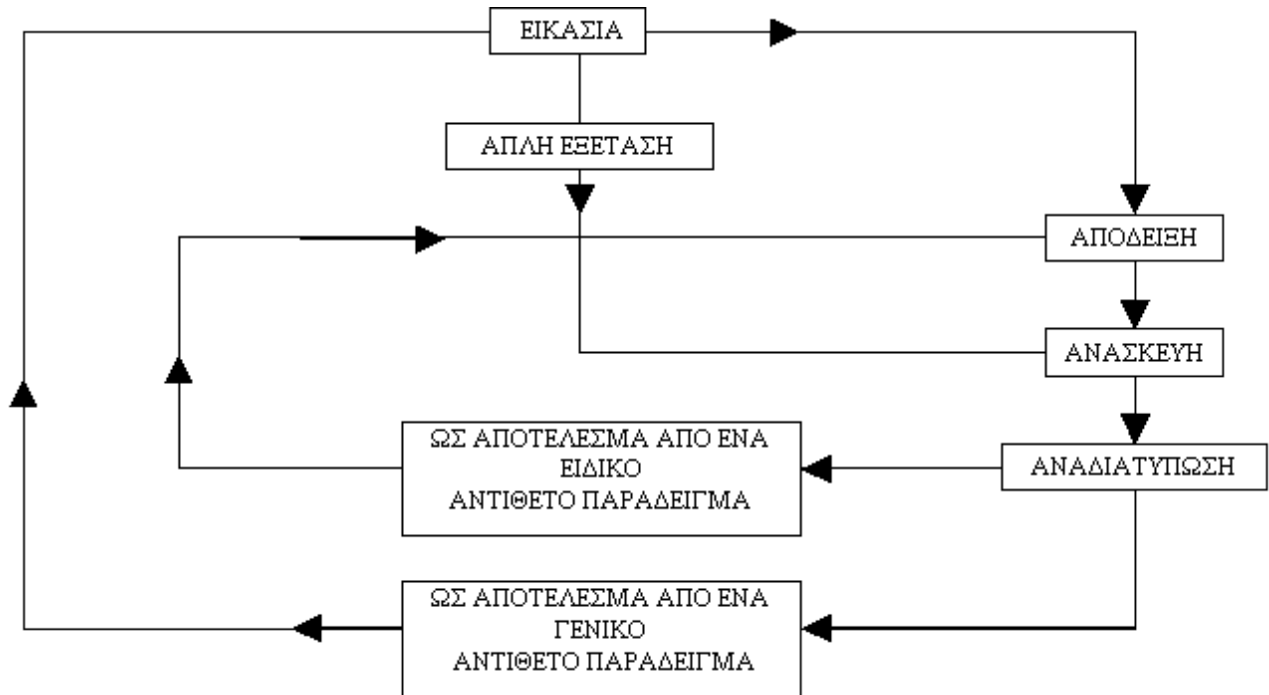
Ένα ανοιχτό πρόβλημα πολλές φορές μπορεί να δοθεί στην τάξη μαζί με λίγα λεπτά σκέψης και κατόπιν μετά από την συλλογή διαφόρων απόψεων ή λύσεων να αποκαλυφθεί η λύση και η δυναμική της για την περαιτέρω διαπραγματεύση του αντικειμένου του μαθήματος. Μπορεί όμως να δοθεί και ως θέμα διαγωνίσματος ή ως εργασία για το σπίτι όταν η έκτασή του το απαιτεί. Ακόμη αν παραμείνει "ανοιχτό" ενόσω στο μάθημα διαπραγματεύονται νέα εργαλεία και αντικείμενα. Τότε γίνεται, στον μαθητή που θα ασχοληθεί σοβαρά με αυτό, σταδιακά σαφές πως με την εισαγωγή νέων εργαλείων και δεδομένων αλλάζει σταδιακά η οπτική γωνία απ' την οποία μπορεί κανείς να δει το πρόβλημα και προσεγγίζεται σταδιακά η λύση ή και η γενίκευσή του.

A) Σ' ένα ανοιχτό πρόβλημα μπορεί να τεθεί ένα πρακτικό ζήτημα (όπως π.χ. σε ένα παιχνίδι) που επιδέχεται θεωρητική λύση) και να ζητηθεί μια λύση του. Η λύση που θα δώσουν οι μαθητές ίσως να είναι ειδική και στοιχειώδης, όμως θα τους δώσει τη δυνατότητα να εξερευνήσουν ένα πεδίο κοντινό στο αντικείμενο που ο καθηγητής έχει στο νού του γιατί όχι από μια διαφορετική οπτική γωνία.

B) Μπορεί ακόμη να ζητηθεί μια εικασία για το τί ισχύει ή για τις ιδιότητες που πρέπει να έχουν τα νέα εργαλεία που χρειάζεται να εισαχθούν.

Αξίζει ακόμα να ειπωθεί ότι το ανοιχτό πρόβλημα δεν περιορίζεται μόνο στα πλαίσια ενός μαθήματος. Μπορεί να τεθεί και στις σελίδες ενός περιοδικού ή σε ιστοσελίδες. Θα πρέπει ωστόσο να τονιστεί ότι σημαντικός παράγοντας ώστε να αποκομιστούν αξιόλογα ωφέλη από την προσπάθεια αυτή είναι η δυνατότητα άμεσης επικοινωνίας του μαθηματικού που θέτει το πρόβλημα και του λύτη. Επίσης ανοιχτά προβλήματα μπορούν να τεθούν και στα πλαίσια ενός διαγωνισμού. Στην περίπτωση δε αυτή η διάκριση αποτελεί μια επιπλέον πρόκληση.

Ο Imre Lakatos στο βιβλίο του *Proofs and Refutations* δίνει ένα παρόμοιο μοντέλο για την ευρετική μέθοδο της μαθηματικής ανακάλυψης που θα μπορούσε κανείς να το δει και σαν ένα μοντέλο για την επεξεργασία ενός ανοιχτού προβλήματος στην τάξη. Πόσες φορές άραγε χρησιμοποιείται ένα παρόμοιο μοντέλλο;



Μια βασική αρχή της παιδαγωγικής είναι ότι όταν ο μαθητής αποκτά εμπειρία αυτού που του διδάσκεται, όταν δηλ. η γνώση γίνεται βίωμα, τότε ξεχνιέται πολύ δυσκολότερα απ' όταν απλά δοθεί ως πληροφορία. Πόσο μάλλον όταν κανείς καταφέρει και να μπει στη διαδικασία αναζήτησής της. Αυτή είναι μια από τις βασικές φιλοδοξίες του ανοιχτού προβλήματος, να αφήσει δηλ. κάτι έντονα χαραγμένο στη μνήμη όχι τόσο ως πληροφορία αλλά ως μια "περιπέτεια" της σκέψης, ως μια μέθοδο.

Για όσους μαθητές φτάσουν στη λύση, ή ικανοποίηση που θα αποκομίσουν αυτοί είναι σίγουρα μεγάλη. Θα τους δώσει την ευκαιρία να δοκιμάσουν την ευχαρίστηση μιας ανακάλυψης, φέρνοντας τους ταυτόχρονα πιο κοντά στη φύση των μαθηματικών. Δεν έχει όμως μονάχα σημασία οι μαθητές να βρουν τη λύση. Ο δρόμος της εξέτασης ενός θεωρητικού ζητήματος από διάφορες απόψεις για τους περισσότερους ίσως μαθητές είναι άγνωστος. Η διαφορετική αυτή φόρμα προβλήματος ανοίγει λοιπόν νέους δρόμους στη σκέψη που ίσως τους κεντρίσουν το ενδιαφέρον. Κάποιοι αργότερα θα δοκιμάσουν να θέσουν προβλήματα στον εαυτό τους και η βοήθεια των καθηγητών τους μπορεί να είναι πολύτιμη.

Εξάλλου μετά από την έστω και ανεπιτυχή προσπάθεια λύσης του προβλήματος οι μαθητές θα αποκτήσουν όχι μόνο μεγαλύτερο ενδιαφέρον και περιέργεια για τη λύση, αλλά και καλύτερη αντίληψη και κατανόησή της καθώς και μεγαλύτερη άνεση να αμφιβάλλουν και να εξετάζουν όσα τους δίνονται. Ακόμη θα μπορέσουν να εντοπίσουν πολλά κενά στη κατανόησή ή στις γνώσεις τους τα οποία ίσως αναγκαστούν να καλύψουν με τον ένα ή τον άλλο τρόπο για να προχωρήσουν.

Επιπλέον το ανοιχτό πρόβλημα ξεφεύγει από την επανάληψη τετριμμένων δρόμων σκέψης και απόδειξης και την μεθοδολογία. Δίνει στους μαθητές τη δυνατότητα να αυτενεργήσουν και τους μαθαίνει πως αυτή ακριβώς η αυστηρά προσωπική τους προσπάθεια έχει πολύ μεγαλύτερη αξία από οποιαδήποτε στείρα επανάληψη.

"Το καινούργιο γεννιέται απ' το παλιό είναι όμως καινούριο." Ένας καθηγητής, θέτοντας στους μαθητές του ένα πρόβλημα δεν τους ζητάει παρά να προχωρήσουν με οδηγό την λογική αλλά και την διαίσθησή τους, συνδυάζοντας και ανασκευάζοντας ότι μέχρι τη στιγμή αυτή γνωρίζουν. Αυτό όμως που θα ανακαλύψουν είναι κάτι καινούριο και μπορούν να το νιώσουν δικό τους.

1.5 ΣΥΚΓΡΙΣΗ ΜΕ ΤΥΠΙΚΗ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

Αν και η μέθοδος παρουσίασης ενός μαθήματος στην οποία ζητάται η ενεργός συμμετοχή και η δημιουργική σκέψη του μαθητή παρουσιάζει σημαντικά πλεονεκτήματα και εισάγει νέους δρόμους στην διδασκαλία και τη διαδικασία κατανόησης ως εκ των πραγμάτων δεν μπορεί ολόκληρο το μάθημα να λειτουργήσει

κατ' αυτό τον τρόπο. Η μαθηματική σκέψη χρειάζεται όχι μόνο την φαντασία και τη δημιουργικότητα αλλά και την αυστηρή γλώσσα και λογική της "παραδοσιακής" μαθηματικής παρουσίασης (τη γλώσσα των στοιχείων του Ευκλείδη). Γιατί υπάρχουν φορές που η λανθασμένη χρήση του ανοιχτού προβλήματος δρα εις βάρος της συνοχής και της οργάνωσης του μαθήματος.

Ακόμη η διαπραγμάτευση ενός ανοιχτού προβλήματος απαιτεί πολύ περισσότερο χρόνο τόσο για την παρουσίασή του στην τάξη όσο και για την διερεύνησή του από τους μαθητές. Έτσι μερικές φορές περιορίζει άλλες δραστηριότητες εξίσου αναγκαίες στα πλαίσια του μαθήματος αλλά και άλλες φορές δεν το επιτρέπει ο περιορισμένος χρόνος που έχουν στη διάθεσή τους οι μαθητές ιδίως στις μεγαλύτερες τάξεις.

Επιπλέον σε κάποιους μαθητές μια τέτοια ερώτηση ίσως προκαλέσει όχι μόνο αμηχανία αλλά και παραίτηση ιδίως όταν δούνε κάποιον συμμαθητή τους να δίνει την απάντησή της με ευχέρεια. Ακόμη η σύγκριση που ίσως δημιουργήσει, ενώ για άλλους μπορεί να αποτελέσει αφετηρία για μεγαλύτερη προσπάθεια, σε άλλους που μεχρι τότε είχαν μια αρκετά καλή σχέση με τα μαθηματικά ίσως φέρει δυσαρέσκεια και απογοήτευση.

Έτσι ο κάθε καθηγητής οφείλει να ρυθμίζει κατάλληλα το χρόνο που θα αφιερώσει στο ανοιχτό πρόβλημα ανάλογα με τις ιδιαίτερες απαιτήσεις και ικανότητες της τάξης του αλλά και την ποσότητα και την φύση της ύλης που οφείλει να καλύψει.

ΑΠΗΧΗΣΗ ΣΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΕΣ

Στο βιβλίο *Proofs and Refutations*, ο Lakatos συνοψίζει μέσα στο διάλογο μια τάξης ένα πολύ μεγάλο χρονικό διάστημα αναζήτησης του ορισμού των πολυέδρων και των αμφιβολιών και υπερασπίσεων του τύπου Euler-Descartes για τα πολυέδρα

$$K - A + E = 2$$

όπου K ο αριθμός των κορυφών, A ο αριθμός των ακμών και E ο αριθμός των εδρών. Η μορφή αυτή παρουσίασης μέσω του διαλόγου των μαθητών και του καθηγητή είναι πολύ πετυχημένη, ζωντανή και συχνά επιθετική όμως χωρίς να το θέλουμε μας έρχεται η ερώτηση αν οι συνηθισμένοι μαθητές θα μπορούσαν να αναπτύξουν έναν τέτοιο διάλογο.

Αν προσπαθήσει κανείς να φανταστεί ή να θυμηθεί την αντίδραση μιας τάξης (ακόμη και στο Πανεπιστήμιο) όταν τεθεί ένα ανοιχτό πρόβλημα, το πιο συνηθισμένο είναι μάλλον ή αμηχανία. Μοιάζει σα να ζητάει ο καθηγητής απ' τους μαθητές του να υπερβούν τον καθημερινό παθητικό τους ρόλο και να ανασκευάσουν τα μαθηματικά (ή και οποιοδήποτε άλλο αντικείμενο). Ζητώντας κάτι που αν το σκεφτεί κανείς καλύτερα είναι συνήθως καρπός σκληρής πνευματικής εργασίας και μιας συνέχειας διαρκών αναθεωρήσεων και ανασκευών με διάρκεια ακόμη και αιώνων.

Όμως ποτέ δεν λείπουν και οι εκπλήξεις. Κάποιος μαθητής συχνά κατορθώνει με μια ερώτηση, κρίση ή απόδειξη να διαρρήξει την ουσία του προβλήματος από τύχη, διαίσθηση, διορατικότητα είτε συνδυάζοντας κάποιες προηγούμενες γνώσεις. Συνήθως δεν μπορεί ακριβώς να προσδιορίσει την πηγή αυτής της έμπνευσης.

Όσο συχνότερα απαιτεί ένας καθηγητής από τους μαθητές του την επεξεργασία ενός ανοιχτού προβλήματος τόσο καλύτερα προσαρμόζονται και μαθαίνουν να σκέφτονται κατ' αυτό τον τρόπο μέχρι το σημείο να ακολουθούν παρόμοια τακτική και στο καθημερινό τους διάβασμα.

Οι περισσότεροι μαθητές ίσως αρχικά αδιαφορήσουν για το πρόβλημα που τους δίνεται. Αν όμως τους ζητηθεί να το διαπραγματευτούν στα πλαίσια γραπτής εξέτασης τότε σίγουρα θα αντιδράσουν αρνητικά όσοι δεν καταφέρουν να το λύσουν. Παρ' όλ' αυτά πριν την επόμενη εξέταση ίσως κατά το διάβασμά τους να λάβουν υπ' όψη τους ότι πρέπει να προετοιμαστούν για να αντιμετωπίσουν ένα παρόμοιο θέμα.

Άλλοι μαθητές πάλι που ίσως βρίσκουν τους ρυθμούς ή το αντικείμενο του μαθήματος ανιαρούς ή τυπικούς θα αντιμετωπίσουν την πρόκληση για κάτι δυσκολότερο με περιέργεια και ενδιαφέρον συνειδητοποιώντας ότι υπάρχουν πολλές ακόμη ικανότητες τις σκέψης και τομείς της γνώσης που δεν έχουν γνωρίσει ή εξασκηθεί. Δεν αποκλείεται να επιχειρήσουν να τους εξερευνήσουν μόνοι τους.

Πάντως ομολογουμένως οι διαδικασίες της σκέψης που απαιτεί το ανοιχτό πρόβλημα ξενίζουν στον ένα ή τον άλλο βαθμό όλους τους μαθητές. Ιδίως όταν οι απαιτήσεις είναι πολλές σε όγκο και δυσκολία κάποια αντίδραση ή δυσσάρεσκεια είναι αναπόφευκτη. Όταν μάλιστα ο καθηγητής αφήνοντάς το "για το σπίτι" δεν επιστρέφει

την επόμενη φορά να δώσει τελικά τη λύση στο πρόβλημα και οι μαθητές ξεχνούν να το δούν ή δεν τολμούν να ρωτήσουν τη λύση δημιουργούνται μεγάλα κενά στην κατανόηση.

Η ΣΧΕΣΗ ΤΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΩΝ ΜΕ ΤΟ ΑΝΟΙΧΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Στη ενότητα αυτή θα προσπαθήσουμε να διερευνήσουμε την σχέση των καθηγητών με το ανοιχτό πρόβλημα, η οποία δεν φαίνεται να είναι και τόσο καλή. Βασικό εφόδιο μας είναι μια αν και σχετικά περιορισμένης έκτασης, αρκετά κατατοπιστική έρευνα στην οποία κλήθηκαν να συμμετάσχουν καθηγητές όχι μόνο μαθηματικών αλλά και φυσικοί και φιλόλογοι. Παραθέτουμε λοιπόν αυτούσια τα αποτελέσματά της. Ακόμη θα προσπαθήσουμε με τη βοήθειά τους να προσεγγίσουμε τη γενικότερη στάση ενός καθηγητή απέναντι στο ανοιχτό πρόβλημα ως εργαλείο της δουλειάς του.

Φαίνεται πάντως ότι όλοι οι καθηγητές γνωρίζουν κάποια πράγματα για το ανοιχτό πρόβλημα, αν και η ορολογία "ανοιχτό πρόβλημα" ξενίζει αρχικά τους περισσότερους και τους αναγκάζει να ζητούν εξηγήσεις. Συνειδητοποιούν όμως γρήγορα ότι πρόκειται για κάτι που έχει ή θα έπρεπε να έχει άμεση σχέση με τη δουλειά τους, μάλιστα ισχυρίζονται ότι το χρησιμοποιούν μάλλον όχι επί καθημερινής βάσης αλλά ωστόσο αρκετές φορές ή όταν το επιτρέπουν οι συνθήκες. Αξιοσημείωτο ωστόσο είναι ότι **κανείς** δεν ισχυρίστηκε ότι το ανοιχτό πρόβλημα παίζει βασικό ρόλο στη διδασκαλία των συναδέλφων του ενώ υπήρξαν και κάποιοι που δεν δίστασαν να τους καταλογίσουν ότι το αγνοούν ως εργαλείο. Όσο για τα εφόδια που απαιτούνται οι μεν φιλόλογοι πιστεύουν ότι τα διαθέτουν οι περισσότεροι μαθηματικοί και οι φυσικοί όμως παραδέχονται ότι δεν έχουν την κατάλληλη εκπαίδευση. Όσο για τις γνώσεις που αποκτούν στο Πανεπιστήμιο είναι κατηγορηματικοί: τους βοηθάνε σ' αυτό σπάνια ή καθόλου.

Αξιοσημείωτο επιπλέον είναι πως στην ερώτηση σε τι νομίζετε ότι βοηθάει περισσότερο το ανοιχτό πρόβλημα η συντριπτική πλειοψηφία απάντησε: στην ανάπτυξη της λογικής σκέψης και μόνο δύο συνολικά ότι βοηθά στην κατανόηση της θεωρίας. Κανένας όμως δεν απάντησε ότι βοηθά στην ικανότητα λύσης δυσκολότερων ασκήσεων (ίσως ένας παραπάνω λόγος για να μην χρησιμοποιείται σε ένα σύστημα εκπαίδευσης που βασίζεται στις εξετάσεις).

Συνήθως υπάρχουν κάποιοι μαθητές που "ενθαρρύνουν" τους καθηγητές να τους δώσουν ένα ανοιχτό πρόβλημα. Ωστόσο και η γενικότερη η στάση των μαθητών κυμαίνεται από θετική έως αδιάφορη, ποτέ αρνητική.

Ένα ακόμη σημείο που αξίζει να τονιστεί είναι ότι οι καθηγητές ισχυρίζονται ότι αντιμετωπίζουν θετικά τους μαθητές που θέτουν προβλήματα στον εαυτό τους πράγμα για το οποίο μπορεί κανείς να διατηρήσει πολλές αμφιβολίες, μάλλον το ανοιχτό πρόβλημα έχει μεγάλες απαιτήσεις σε χρόνο αλλά και γνώσεις και πολύ καλή διάθεση. Αν ρωτούσε κανείς τους μαθητές δεν αποκλείεται οι απαντήσεις να ήταν πολύ διαφορετικές.

ΑΝΤΙΘΕΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΓΛΩΣΣΙΚΗΣ ΑΝΤΙΛΗΨΗΣ

Όπως φάνηκε και από τη έρευνα οι Φιλολόγοι βρίσκουν πολύ πιο αυτονόητη και μάλλον ευκολότερη τη χρήση ενός ανοιχτού προβλήματος σε σχέση με τους Μαθηματικούς, αλλά και τους Φυσικούς. Δηλώνουν όμως πως αυτό δεν οφείλεται στην καλή τους εκπαίδευση. Θα μπορούσε ίσως κανείς να θεωρήσει ως αιτία γι' αυτό το γεγονός ότι ο χώρος των ανθρωπιστικών σπουδών βρίσκεται στον ήχο στην εικόνα και στην κοινή γλώσσα. Η γλώσσα της επιστήμης και ειδικότερα των μαθηματικών είναι πολύ μακρύτερα από την καθημερινή γλώσσα επικοινωνίας και βρίσκεται μόνο στα βιβλία ή τις λίγες ώρες του σχολικού μαθήματος. Ακόμη και η αυστηρή λογική που χρησιμοποιείται στη σφαίρα των μαθηματικών αν και θεωρείται αυτονόητη δεν είναι ασκείται σε ιδιαίτερο βαθμό στις υπόλοιπες καθημερινές δραστηριότητες. Αντίθετα οι λέξεις και οι εικόνες και οι ήχοι αποτελούν όχι μόνο το υλικό της σκέψης αλλά και τα διαρκή ερεθίσματά μας. Έτσι η διαδικασία της αυτόνομης και λογικά ορθής σκέψης στο πλαίσιο των μαθηματικών είναι πολύ δυσκολότερο να ενθαρρυνθεί από την επεξεργασία του νοήματος ενός κειμένου.

Επιπλέον αν θεωρήσουμε τον κόσμο κατά την σοφιστική αντίληψη, με τη γλώσσα μπορούμε να τεκμηριώσουμε λογικά οποιαδήποτε άποψη. Αυτό σημαίνει ότι κάτι δεν είναι ανγκαστικά αλήθεια ή ψέμα. Για τον ανθρωπιστή η πρόταση:

Ένας Κρητικός έλεγε ότι όλοι οι Κρητικοί είναι ψεύτες.

είναι μια πρόταση σαν τις άλλες, ένα παιχνίδι της γλώσσας. Για τον μαθηματικό αποτελεί μια περίπτωση του παραδόξου του Russel ένα σημείο αμφιβολίας για το οικοδόμημα της λογικής. Αν δύο άνθρωποι έχουν βρεί διαφορετικά αποτελέσματα (όχι διαφορετικές εκφράσεις του ίδιου αποτελέσματος) στο ίδιο μαθηματικό πρόβλημα τότε είτε ο ένας είτε και οι δύο έχουν κάνει κάποιο λάθος. Αν όμως εκφέρουν διαφορετικές απόψεις για το ίδιο ζήτημα κανείς δεν αποκλείει ότι και οι δύο είναι "σωστές" ότι και οι δύο μπορούν να τεκμηριωθούν λογικά. Όταν λοιπόν ένας μαθητής σκεφτεί κάτι διαφορετικό απ' αυτό που γνωρίζει ο καθηγητής των μαθηματικών πρέπει να εντοπίσει το λάθος. Ο φιλόλογος μπορεί όμως να αποδεχτεί την διαφορετική άποψη και να την συνθέσει με όσες άλλες έχει υπ' όψη του. Στην ανάλυση ενός κειμένου ή την διαπραγμάτευση ενός καθημερινού ζητήματος ή προβληματισμού υπάρχουν ανεξάντλητες διαδικασίες τεκμηρίωσης αλλά και ανεξάντλητα πιθανά αποτελέσματα που μάλλον δεν μπορούν να γενικευτούν σε ένα. Στα μαθηματικά υπάρχουν μεν πολλοί τρόποι απόδειξης αλλά μονάχα ένα δυνατό αποτέλεσμα. Αν αποδεικνυόταν κάτι διαφορετικό τότε θα κατέρρεε ίσως ένα μεγάλο μέρος απ' το οικοδόμημα των μαθηματικών με πρώτο παράδειγμα την απαγωγή σε άτοπο.

Ωστόσο η σχετικά μεγαλύτερη αυτή δυσκολία δεν μπορεί να αποτελέσει δικαιολογία ικανή να απαλλάξει τους μετέχοντες στην εκπαιδευτική διαδικασία απ' την ευθύνη να προσπαθήσουν στην ανέλιξη της σκέψης σε μεγαλύτερους βαθμούς ελευθερίας και δημιουργικότητας. Εξάλλου το ότι οι φιλόλογοι ισχυρίζονται ότι χρησιμοποιούν το ανοιχτό πρόβλημα έχει άμεση σχέση με το πως εννοούν την έννοια "ανοιχτό πρόβλημα". Έτσι για παράδειγμα αν και ζητούν τη γνώμη των μαθητών τους κατά την νοηματική ανάλυση ενός κειμένου συνήθως δεν σκέφτονται να τους ζητήσουν να συνάγουν έναν λογικό κανόνα της γραμματικής ή του συντακτικού.

Αξιοσημείωτο πάντως είναι το ότι αρνήθηκαν να απαντήσουν τρεις φιλόλογοι έναντι ενός μαθηματικού είτε γιατί τους φάνηκε κάτι αυτονόητο είτε γιατί το θέμα δεν τους ενδιέφερε.

ΦΑΝΤΑΣΙΑ

"Είναι η ικανότητα - δυνατότητα που έχει το ανθρώπινο πνεύμα να παράγει νοητικές παραστάσεις με μικρό ή μεγάλο βαθμό ομοιότητας με τον αντικειμενικό κόσμο. Η διάκριση στους τύπους των νοητικών εικόνων που παράγει ή αναπαράγει η φαντασία έχει άμεση σχέση με το βαθμό συνάφειας και πιστότητας που έχει το νοητικό προϊόν με το φυσικό αντικείμενο - ερέθισμα.

Βασικά όμως ο όρος φαντασία δηλώνει την παραστατική λειτουργία (τη δυνατότητα για να δημιουργούμε παραστάσεις), που είναι σημαντικά ελεύθερη από τα αντικείμενα του εξωτερικού κόσμου στο να δημιουργεί νοητικές παραστάσεις.

Ανάλογα με τη συνάφεια, που έχει το νοητικό δημιούργημα με την αντικειμενική πραγματικότητα, η φαντασία διακρίνεται σε αναπαραγωγική και παραγωγική.

Ακόμη διακρίνουμε τη φαντασία και σε δημιουργική, στις περιπτώσεις εκείνες που η διανοητική σύλληψη βοηθά την επιστημονική ή καλλιτεχνική δημιουργία και πρόοδο.

Επιπλέον πρέπει να τονιστεί ότι οποιοδήποτε νοητικό δημιούργημα είναι αδύνατο να είναι απόλυτα ξένο προς την αντικειμενική πραγματικότητα, γιατί η εμπειρία του δημιουργού του βασίζεται στους ερεθισμούς που τα αντικείμενα δημιούργησαν στην πνευματική του λειτουργία διαμέσου των αισθήσεων."

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

Ως φιλοσοφικός όρος χρησιμοποιείται πρώτη φορά απ' τον Πλάτωνα. Στο "Σοφιστή" 264B χαρακτηρίζει την φαντασία ως "συσμειξιν αισθήσεως και δόξης". Για να δηλώσει δε την ικανότητα της ψυχής να δημιουργεί νοητές εικόνες και αντικείμενα χρησιμοποιεί τον όρο "ειδωλοποιική τέχνη", "ειδωλοποιία". Την ίδια σημασία έχει ο όρος φαντασία και στον Αριστοτέλη, ο οποίος ονομάζει την εποπτική παράσταση "φάντασμα". Για την φαντασία φαίνεται ότι είχε μιλήσει και ο Δημόκριτος, ο οποίος δίδασκε ότι η αισθητική εντύπωση προκαλείται από είδωλα, τα οποία εξακοντιζόμενα από τα αντικείμενα εντυπώνονται στη ψυχή.

Πέρασαν πολλοί αιώνες έως ότου, την εποχή της Αναγέννησης, ο Γερμανός γιατρός και αποκρυφιστής Παράκελσος καθώς και οι μυστικιστές Ι. Μπαΐμε και Μπάαντερ, τάξουν την φαντασία στην πρώτη βαθμίδα των πνευματικών λειτουργιών. Και ο Καμπανέλλα χαρακτηρίζει αυτή ως "**ιδεοποιό δύναμη**", **στην οποία οφείλεται η ανακάλυψη των επιστημών**. Τον δημιουργικό και εποπτικό χαρακτήρα της φαντασίας εξαίρει και ο Descartes, ο οποίος λέει ότι οι φανταστικές παραστάσεις οφείλουν τη γεννησή τους όχι στον φυσιολογικό οργανισμό του ανθρώπου, αλλά στη θέληση. Οι Γερμανοί φιλόσοφοι των νεότερων χρόνων αντιλαμβάνονται τη φαντασία ως δύναμη της ψυχής μέσω της οποίας αυτή αναπαράγει τις εικόνες πραγμάτων τα οποία δεν έχει μπροστά της.

Η νεότερη ψυχολογική έρευνα εξετάζει τη φαντασία σε συσχετισμό με το φαινόμενο της έμπνευσης και της εύρεσης. Ιδιαίτερη βαρύτητα δίνεται στη αναπαραγωγική ή δημιουργική φαντασία, δηλ. η ικανότητα της ψυχής να δημιουργεί νέους συνδυασμούς των μνημονικών εικόνων. Η ψυχή διασπά τις μνημονικές παραστάσεις και έπειτα σχηματίζει απ' τα διασπόμενα στοιχεία νέους συνδυασμούς. Την κατατάσσουν στα μνημονικά φαινόμενα. Ως ένα απ' τα κυριότερα χαρακτηριστικά της φαντασίας αναγνωρίζουν ότι απελευθερώνει τον άνθρωπο απ' τα δεσμά των συνθηκών του παρόντος και ανοίγει σ' αυτόν έναν νέο ορίζοντα στον οποίο μπορεί να κινείται ελεύθερα για κάποιο χρόνο. Το κύριο χαρακτηριστικό ενός φανταστικού βιώματος είναι ότι δεν κατέχει μια ορισμένη θέση στον πραγματικό χώρο και χρόνο. Ο υπαρξιστής Jean-Paul Sartre χαρακτηρίζει την φαντασία ως "μηδενιστική λειτουργία της συνειδήσεως". **Κατά τους ψυχολόγους τα φαινόμενα της Φαντασίας και της ευρέσεως μέσω των οποίων πραγματοποιούνται οι ανακαλύψεις ανήκουν στην ίδια κατηγορία. Τα προϊόντα της φαντασίας και της ευρέσεως έχουν το χαρακτηριστικό ότι ανήκουν στην περιοχή της δυνατότητας. Κάθε εύρεση πραγματοποιεί κάτι που πριν δεν ήταν πραγματικό αλλά εμφανιζόταν ως απλή δυνατότητα.**

Η διαφορά μεταξύ φαντασίας και εύρεσης έγκειται στο ότι στη φαντασία η δημιουργική συνδυαστική ενέργεια τελείται δίχως έλεγχο ενώ στην εύρεση υπάρχει έλεγχος και προκαθορισμένη κατεύθυνση.

ΣΧΕΣΗ ΑΝΟΙΧΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ - ΦΑΝΤΑΣΙΑΣ

Η σχέση του ανοιχτού προβλήματος με την δημιουργική φαντασία είναι άμεση - πράγμα που ισχυρίστηκαν και όλοι οι καθηγητές που ρωτήθηκαν-. Όχι μόνο η εύρεση της λύσης αλλά ακόμη περισσότερο και η ίδια η επινόησή του και ο ορισμός των ορίων του απαιτούν την ουσιαστική συμβολή της **φαντασίας, η οποία δεν απαιτείται φυσικά μόνο απ' τον μαθητή αλλά και απ' τον ίδιο τον καθηγητή**, ο οποίος καλείται να δημιουργήσει στο νου του προεκτάσεις των θεωρητικών ζητημάτων και των μαθηματικών αντικειμένων που κατέχει και μάλιστα τέτοιες που οι μαθητές του είναι σε θέση να τους ακολουθήσουν προχωρώντας ακόμη παραπέρα. Ακόμη ο καθηγητής πρέπει να προσπαθήσει να ακολουθήσει τους συλλογισμούς των μαθητών του και μέσω αυτών να επαναπροσεγγίσει τα όσα ήδη γνωρίζει. Αν δεν εμπιστεύεται την φαντασία του και τη δημιουργική του σκέψη είναι μάλλον αδύνατο να νιώθει ότι είναι σε θέση ,αλλά ούτε και θα έχει τη διάθεση, να ασχοληθεί με ένα τέτοιο πρόβλημα.

Από πλευράς του μαθητή η ικανότητα ανάπλασης και συνδυασμού που απαιτεί το ανοιχτό πρόβλημα προϋποθέτει μια βαθιά και για τους περισσότερους τουλάχιστον ανθρώπους εποπτική αντίληψη και γνώση των μαθηματικών αντικειμένων. Η φαντασία είναι αναγκαία και (όπως την προσεγγίζει ο Descartes δηλαδή) ως διαδικασία της ανθρώπινης βούλησης. Η βούληση αυτή μεταφράζεται μέσω της συγκέντρωσης των διαφόρων αντικειμένων και συνδυασμού τους ώστε να φτάσουν σε ένα επιθυμητό αποτέλεσμα. Με λίγα λόγια πρέπει κανείς να επιθυμεί την λύση αλλά και να επιμένει.

Άλλο ένα λεπτό σημείο είναι ότι σε οποιοδήποτε πρόβλημα του οποίου η λύση δεν διαφαίνεται με την πρώτη ματιά είναι ότι απαιτείται διαρκής αναπροσαρμογή της στάσης και αλλαγή της οπτικής γωνίας. Μια εικασία όσο και αν επιστευόμαστε την διαίσθησή μας είναι πολύ σπάνιο να είναι ολότελα σωστή. Αποτελεί όμως το έναυσμα για την ακολούθηση μιας συγκεκριμένης διαδικασίας σκέψης. Όμως αν δούμε ότι αυτή δεν καταλήγει πουθενά αναγκαζόμαστε να αναπροσαρμόσουμε την στάση μας απέναντι στο πρόβλημα ολικά ή μερικά κάτι που όπως διαπιστώνει κανείς δεν είναι καθόλου εύκολο. Εδώ η φαντασία με την υπερβατικότητά της μπορεί να μας βγάλει απ' το αδιέξοδο και την επανάληψη δίνοντας μας νέους συνδυασμούς. Έγκειται πια στη διορατικότητα την επειρία και την ευφυΐα μας να δούμε που κρύβεται η λύση.

Τέλος ο καθηγητής πάλι πρέπει να προσπαθήσει να ακολουθήσει την φαντασία των μαθητών του που εκτός των άλλων και λόγω της ηλικίας τους του είναι αρκετά απρόσιτη. Εκεί θα αναζητήσει **τον τρόπο με τον οποίο αποτυπώθηκαν οι έννοιες που διδάσκει στην αντίληψη των μαθητών του και τα πιθανά λάθη ή τις ασάφειες στη αποτύπωση αυτή, αλλά και τα θετικά της στοιχεία.** Η εμπειρία αυτή ίσως βελτιώσει τον τρόπο με τον οποίο γίνεται ολόκληρη η παράδοση του μαθήματος. Έτσι λοιπόν πραγματικά το ανοιχτό πρόβλημα είναι μια συμπόρευση μαθητή και καθηγητή με πολλαπλούς στόχους, αλλά και καρπούς.

ΕΥΡΕΤΙΚΗ - ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΝΕΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Τα μαθηματικά τότε στο μέλλον θα αποκτήσουν κάποια σημασία για πάρα πολλούς απ' τους μαθητές: "θα γίνουν ίσως ένα hobby ένα εργαλείο για τη δουλεία τους ή μια μεγάλη φιλοδοξία". Ο καθηγητής των μαθηματικών έχει την ευθύνη για την πρώτη "μύηση" στις νοητικές διαδικασίες της επίλυσης προβλημάτων.

Αυτοί για τους οποίους τα μαθηματικά θα γίνουν το επάγγελμα ή μια μεγάλη φιλοδοξία είναι σίγουρα σχετικά πολύ λίγοι. Ωστόσο κάθε μάθημα μαθηματικών θα πρέπει να λαμβάνει υπόψη και αυτούς οι οποίοι αργότερα θα ασχοληθούν άμεσα με τα μαθηματικά και επιλέον να επιδιώκει να τους κεντρίσει ακόμη περισσότερο το ενδιαφέρον και να τους ανοίξει νέους δρόμους σκέψης. Το ανοιχτό πρόβλημα είναι το εργαλείο που κατεξοχήν μπορεί να βοηθήσει σε αυτό.

6.1 ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΕΙΣ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΩΝ

Αξίζει να σημειωθεί πως ο καθηγητής είναι μάλλον ο μόνος που μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές του να γνωρίσουν την μέθοδο και την ικανοποίηση μιας ανακάλυψης, αφού "συνήθως η παρουσίαση στα εγχειρίδια είναι "ανάδρομη". Η διαδικασία της ανακάλυψης δεν αναφέρεται. Αφού έχει γίνει η επεξεργασία του θεωρήματος και η απόδειξή του, με οποιονδήποτε τρόπο και με οποιοδήποτε μέσο, ολόκληρη η λεκτική και συμβολική παρουσίαση αναπροσαρμόζονται, συμμορφώνονται και αναδιοργανώνονται σύμφωνα με τους κανόνες της λογικής παραγωγικής μεθόδου. Αυτό απαιτεί η αισθητική του κλάδου. Το απαιτεί το ιστορικό προηγούμενο, η Ελληνική παράδοση. Είναι επίσης αλήθεια ότι για λόγους οικονομικούς οι εκδοτικές επιχειρήσεις απαιτούν το μέγιστο αριθμό πληροφοριών στον ελάχιστο χώρο. Τα μαθηματικά τείνουν να το επιτύχουν αυτό και με το παραπάνω. Η βραχυλογία της μαθηματικής αίγλης ή ευφυΐας. Οι πιο πλήρεις εξηγήσεις θεωρούνται ανιαρές."

Οι περισσότεροι καθηγητές δε, σε βασικές γραμμές δεν προχωρούν πέρα από τον τρόπο απόδειξης των σχολικών εγχειριδίων ή παρουσιάζουν αφελή, περισσότερο μνημονικά παρά ευρετικά κόλπα και τυποποιημένους κανόνες μεθοδολογίας. Όλοι ως μαθητές κάποια στιγμή μπροστά σε μια δύσκολη απόδειξη αναφώνησαν: "Ναι, η λύση φαίνεται σωστή αλλά πως είναι δυνατόν να σκεφτεί κανείς κάτι τέτοιο;". Σίγουρα αυτό δε σημαίνει πως δεν πρέπει ο καθηγητής να παρουσιάσει μια αυστηρή απόδειξη και να ενθαρρύνει τους μαθητές του να μάθουν να είναι αυστηροί στις δικές τους λύσεις και αποδείξη. Όμως μπορεί να τους προκαλέσει και να τους βοηθήσει αν χρειαστεί να προσεγγίσουν τη λύση και με άλλους τρόπους όπως τη διαίσθηση και τη φαντασία καθώς και την ανάδρομη διαδικασία απ' αυτή της απόδειξης.

6.2 Η ΦΙΛΟΣΟΦΙΑ ΤΗΣ ΑΜΦΙΣΒΗΤΗΣΗΣ

Για τους περισσότερους ανθρώπους, συμπεριλαμβανόμενων και των μαθηματικών υπάρχει μια υπερβολική εμπιστοσύνη στα συμπεράσματα της επιστήμης. "Κατακρίνουμε" τους επιστήμονες των προηγούμενων αιώνων για τις πλάνες τους ή

την ανικανότητά τους να αντιμετωπίσουν ένα θέμα σφαιρικά, νομίζοντας όμως ότι η σύγχρονη επιστήμη έχει πει την τελευταία λέξη.

"Στα 1934 έγινε μια επανάσταση στη φιλοσοφία της επιστήμης, όταν ο Karl Popper υποστήριξε ότι οι επιστημονικές θεωρίες δεν προκύπτουν επαγωγικά από γεγονότα. Μάλλον επινοούνται ως υποθέσεις, εικασίες ακόμη και ως μαντέματα και τότε υπόκεινται σε πειραματικές δοκιμασίες, κατά τις οποίες οι επικριτές τους προσπαθούν να τις ανατρέψουν. Μιά θεωρία επιτρέπεται να θεωρείται επιστημονική, Από τη στιγμή που μια θεωρία επιβιώνει μετά από τέτοιες δοκιμασίες αποκτά ένα βαθμό αξιοπιστίας και μπορεί να θεωρηθεί ότι έχει εδραιωθεί προσωρινά."

Άμεσα επηρεασμένος από τη θεωρία αυτή ο Imre Lakatos στο βιβλίο του *Proofs and Refutations* την μεταφράζει εν μέρη στα μαθηματικά. Μέσα απ' το διάλογο ενός καθηγητή με τους μαθητές του για έναν πασίγνωστο τύπο μας δημιουργεί την ανασφαλή εντύπωση ότι τα μαθηματικά όπως και οι άλλες φυσικές επιστήμες, ανπτύσσονται με την κριτική και τη διόρθωση των θεωριών τους που δεν είναι ολοκληρωτικά απαλλαγμένες από ασάφεια ή την πιθανότητα λάθους ή παράλειψης. Ξεκινώντας από ένα πρόβλημα ή μια εικασία υπάρχει μια ταυτόχρονη αναζήτηση για αποδείξεις και αντιπαραδείγματα. "Απόδειξη" σ' αυτό το γενικό πλαίσιο μη τυποποιημένων μαθηματικών σημαίνει μάλλον επεξηγήσεις πιστοποιήσεις επεξεργασίες που κάνουν την εικασία πιο εύλογη, πιο πειστική, ενώ γίνεται πιο αναλυτική και ακριβής κάτω απ' την πίεση των αντιπαραδειγμάτων.

Ένας τέτοιος προβληματισμός γύρω από τα μαθηματικά και την απόδειξη απέχει μάλλον πάρα πολύ από τα σχολικά δεδομένα. Απ' τη μια μεριά ίσως δημιουργούσε μια σύγχυση και ανασφάλεια στον μαθητή που μόλις που αρχίζει να γνωρίζει τον κόσμο των μαθηματικών. Απ' την άλλη όμως μεριά η στάση των περισσότερων καθηγητών σκοτώνει την έμφυτη και υγιή τάση των μαθητών του για αμφισβήτηση και περαιτέρω εξέταση. Αργότερα θα κάνουν μεγάλη προσπάθεια αν επιθυμήσουν να δούν πάλι τα πράγματα αλλά και τα δικά τους λογικά επιχειρήματα με μεγαλύτερη δυσπιστία. Κάτι ανάλογο με τη ρήση του Πικάσο: "Έκανα χρόνια για να μάθω να ζωγραφίζω πάλι σαν παιδί."

6.3 ΟΙ ΝΟΗΤΙΚΕΣ ΚΑΙ ΨΥΧΟΛΟΓΙΚΕΣ ΔΙΕΡΓΑΣΙΕΣ ΜΙΑΣ ΑΝΚΑΛΥΨΗΣ ΚΑΙ Η ΣΧΕΣΗ ΤΟΥΣ ΜΕ ΤΟ ΑΝΟΙΧΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΚΑΙ ΤΗ ΦΑΝΤΑΣΙΑ.

Ο Solomon Feferman γράφει για τη λογική της μαθηματικής απόδειξης:

Ο μαθηματικός, όταν εργάζεται, στηρίζεται σε εκπληκτικά ασαφείς εννοήσεις και προχωρά μέσα από αδέξιες προσαρμογές και εκκινήσεις με πολύ συχνές αναστροφές. Είναι ξεκάθαρο ότι η λογική όπως είναι δεν καταφέρνει να δώσει μια άμεση ερμηνεία είτε της ιστορικής ανάπτυξης των μαθηματικών είτε της καθημερινής εμπειρίας αυτών που την ασκούν.

Η διαδικασία της ανακάλυψης είναι κάτι που φαίνεται να υπερβαίνει την αυστηρή λογική. Έχουν γίνει κατά καιρούς προσπάθειες στα πλαίσια της "ευρετικής" για να προσδιοριστούν οι νοητικές διεργασίες που λαμβάνουν χώρα κατά τη διαδικασία μιας ανακάλυψης ή τη διαδικασία λύσης ενός προβλήματος. Με το θέμα μάλιστα έχουν ασχοληθεί με ιδιαίτερο ζήλο ο Πάππος, ο Descartes, ο Leibnitz και ο Bolzano.

Φαίνεται ωστόσο ότι το ανοιχτό πρόβλημα με όλη την ασάφεια και τη δυσκολία του είναι πολύ πιο κοντά στην διαδικασία ανακάλυψης από ένα σύνηθες πρόβλημα.

Απ' την άλλη μεριά και η σπουδαιότητα της φαντασίας είναι μεγάλη και κατά την πραγματοποίηση των νέων επινοήσεων και εφευρέσεων. Οι ψυχολόγοι έχουν διατυπώσει διάφορες θεωρίες για να εξηγήσουν κατά ποιό τρόπο επιτελούνται οι εφευρέσεις και οι νέες επινοήσεις. Η θεωρία του απλού συνδυασμού των ήδη υπάρχοντων στοιχείων δεν είναι ικανή να εξηγήσει πως γεννιέται κάτι το νέο και άγνωστο απ' τα ήδη γνωστά. Μιά μεταρρυθμισμένη μορφή της θεωρίας του συνειρμού αποτελεί η μορφολογική θεωρία. Κατά αυτή η ύπαρξη στη συνείδηση του ανθρώπου ενός θέματος για λύση δημιουργεί στην ψυχή συμπλέγματα παραστάσεων τα οποία μένουν ατελή εφ' όσον δεν βρίσκεται η απαιτούμενη λύση. Σε μια όμως ευτυχή στιγμή επέρχεται αιφνιδιαστικά η ολοκλήρωση των μέχρι τότε ατελών συμπλεγμάτων και βρίσκεται η λύση. Κατά τον τρόπο αυτό η εύρεση θεωρείται φαινόμενο το οποίο οφείλεται στην τάση την οποία έχει η ψυχική ζωή προς ολοκλήρωση. Ο Γάλλος φιλόσοφος Μπέρκσον διατύπωσε την άποψη, ότι η προϋπόθεση για να επιτελεστεί η εύρεση είναι να συλλάβει το πνεύμα μας με την ενόραση ένα σχήμα το οποίο έπειτα θα πραγματοποιήσει.

Όλες οι θεωρίες συμφωνούν στο ότι χρειάζεται μακροχρόνια προπαρασκευή, επίμονη προσπάθεια, συναισθηματικά κίνητρα και ύπαρξη προδιαθέσεων για να πραγματωθεί η εφεύρεση. Το ανοιχτό πρόβλημα αποτελεί μια απ' τις καταλληλότερες μορφές άσκησης στην κατεύθυνση αυτή.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΚΑΘΗΜΕΡΙΝΟΤΗΤΑ

"Τα πρακτικά προβλήματα διαφέρουν σε πολλές απόψεις από τα καθαρά μαθηματικά προβλήματα, ωστόσο τα βασικά κινητρά και οι διαδικασίες της λύσης είναι αναγκαία οι ίδιες. Τα τεχνικά προβλήματα συνήθως σχετίζονται με μαθηματικά προβλήματα. Θα πούμε λίγα λόγια για τις διαφορές, αναλογίες, και σχέσεις μεταξύ αυτών των τύπων προβλημάτων.

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα πρακτικού προβλήματος είναι η κατασκευή ενός φράγματος κατά μήκος ενός ποταμού. Δεν χρειαζόμαστε ειδικές γνώσεις για να κατανοήσουμε το πρόβλημα. Από τα προϊστορικά σχεδόν χρόνια, πολύ πριν την εποχή των επιστημονικών θεωριών, οι άνθρωποι έχτιζαν κάποιου είδους φράγματα στην κοιλάδα του Νείλου και σε άλλα σημεία του πλανήτη όπου η σοδεία εξαρτώταν απ' την άρδρευση.

Ας φανταστούμε το πρόβλημα της κατασκευής ενός σημαντικού νέου φράγματος.

Ποιά είναι το ζητούμενο; Πολλά ζητούμενα συγκαταλέγονται σ' αυτό το πρόβλημα: η ακριβής θέση του φράγματος, το γεωμετρικό του σχήμα και οι διαστάσεις, τα υλικά που θα χρησιμοποιηθούν στην κατασκευή, και ούτο καθεξής.

Ποιές είναι οι συνθήκες (τα στοιχεία); Δεν μπορούμε να απαντήσουμε αυτή την ερώτηση γιατί υπάρχουν πολλά δεδομένα. Σε ένα τόσο μεγάλο έργο είναι ανάγκη να ικανοποιούνται πολλές σημαντικές οικονομικές ανάγκες και να πληττονται όσο το δυνατόν λιγότερο άλλες. Το φράγμα θα πρέπει να παρέχει ηλεκτρική ενέργεια, να παρέχει νερό για άρδρευση ή και ύδρευση και επίσης να βοηθά στον έλεγχο των πλημμύρων. Απ' την άλλη μεριά, θα πρέπει να δυσχεραίνει όσο το δυνατόν λιγότερο την ακτοπλοΐα, ή οικονομικά σημαντική θαλάσσια ζωή, ή το τοπίο και ούτω καθεξής. Και φυσικά θα πρέπει να κοστίζει όσο το δυνατόν λιγότερο και να κατασκευαστεί όσο το δυνατόν γρηγορότερα.

Ποιά τα δεδομένα; Το πλήθος των επιθυμητών δεδομένων είναι τεράστιο. Χρειαζόμαστε τοπογραφικά δεδομένα σχετικά με την περιοχή του ποταμού και τους παραποτάμους του, γεωλογικά στοιχεία σημαντικά για την στερεότητα των θεμελίων του, πιθανές διαρροές, και διαθέσιμα υλικά για κατασκευή; μετεωρολογικά στοιχεία για την ετήσια βροχόπτωση και το ύψος των πλημμύρων; οικονομικά στοιχεία σχετικά με την αξία του εδάφους που θα σκεπαστεί με νερό, το κόστος των υλικών και των εργατικών.

[...] Το παράδειγμά μας δείχνει ότι **τα ζητούμενα, τα στοιχεία οι συνθήκες καθώς και οι γνώσεις που απαιτούνται είναι πιά πολύπλοκα και λιγότερο αυστηρά καθορισμένα** στα πρακτικά απ' ότι στα μαθηματικά προβλήματα.

[...] Είναι ιδιαίτερα εξαπλωμένη η άποψη ότι τα πρακτικά προβλήματα απαιτούν περισσότερη εμπειρία απ' ότι τα μαθηματικά προβλήματα. Ωστόσο η διαφορά έγκειται στη φύση της γνώσης που απαιτείται και όχι στην στάση μας απέναντι στο πρόβλημα. Κατά τη λύση ενός προβλήματος του ενός ή του άλλου είδους, έχουμε να βασιστούμε στη εμπειρία μας με παρόμοια προβλήματα και συχνά θέτουμε τις ερωτήσεις: *Έχετε λύσει το ίδιο πρόβλημα σε μια ελαφρά διαφορετική μορφή; Γνωρίζετε ένα σχετικό πρόβλημα;*

Κατά τη ενός μαθηματικού προβλήματος ξεκινάμε από πολύ καθαρές ιδέες που είναι αρκετά καλά οργανωμένες στο μυαλό μας. **Κατά τη λύση ενός πρακτικού προβλήματος, είμαστε συχνά αναγκασμένοι να ξεκινήσουμε από μάλλον ασαφείς ιδέες, τότε το να ξεδιαλύνουμε τις έννοιες είναι ένα σημαντικό μέρος του προβλήματος.**

Σε ένα τέλεια διατυπωμένο μαθηματικό πρόβλημα όλα τα στοιχεία και οι όροι της συνθήκης είναι απαραίτητα και πρέπει να ληφθούν υπ' όψη. Στα πρακτικά προβλήματα έχουμε ένα πλήθος στοιχείων και συνθηκών. Λαμβάνουμε υπ' όψη όσο περισσότερα μπορούμε αλλά αναγκαστικά θα αγνοήσουμε κάποια. [...] Τα δεδομένα του προβλήματος είναι, μιλώντας κυριολεκτικά ανεξάντλητα."

Βλέπουμε λοιπόν ότι η διαδικασία της σκέψης σε ένα πρακτικό πρόβλημα ακόμη και αν δεν έχει φαινομενικά καμία σχέση με τα μαθηματικά παρουσιάζει ομοιότητες με το αυστηρό μαθηματικό πρόβλημα. Έχοντας κανείς διαβάσει και προβληματιστεί πάνω στα προηγούμενα κεφάλαια μάλλον θα σκεφτεί ότι το ανοιχτό πρόβλημα

δεν είναι λοιπόν μόνο πιο κοντά από το "τέλεια διατυπωμένο πρόβλημα" στην απρόσιτη για τους περισσότερους περιοχή της μαθηματικής έρευνας αλλά και στην καθημερινότητα.

Το ανοιχτό πρόβλημα, όπως και ένα πρακτικό πρόβλημα είναι αρκετά ασαφές και ένα σημαντικό βήμα στη διαπραγματεύσή του είναι η αποσαφήνιση των ιδεών που μπορεί κανείς να συνδέσει μ' αυτό. Ένα επιπλέον κοινό χαρακτηριστικό τους είναι το ότι τα ζητούμενα, τα στοιχεία οι συνθήκες καθώς και οι γνώσεις που απαιτούνται είναι πίο πολύπλοκα και λιγότερο αυστηρά καθορισμένα. Αν δεν μπορούμε να δούμε το πρόβλημα στη γενική του μορφή μπορούμε μάλιστα να λύσουμε κάποιες υποπεριπτώσεις. Στην ουσία συνήθως δεν βλέπουμε την γενική μορφή παρά διαπραγματευόμαστε τα διάφορα προβλήματα ειδικά, ενώ η ενοποίηση συναντά σημαντικές δυσκολίες και είναι μια απ' τις πιο ζωνηρές επιδιώξεις της επιστήμης εν γένει.

Παρόλ' αυτά οι περισσότεροι καθηγητές αν και πιστεύουν ότι η φαντασία σχετίζεται με την καθημερινή ζωή και βοηθάει στη επίλυση των προβλημάτων της τηρούν και κάποιες επιφυλάξεις. Ίσως γιατί η ικανότητα στη αντιμετώπιση των προβλημάτων της καθημερινής ζωής δεν συνεπάγεται και την ικανότητα λύσης μαθηματικών προβλημάτων αλλά ούτε και το αντίστροφο. Αν αυτό οφείλεται σε εξωγενείς παράγοντες ή σε κάποια έμφυτα χαρακτηριστικά είναι ένα ανοιχτό ζήτημα της ψυχολογίας. Ωστόσο οι περισσότεροι άνθρωποι δανείζονται στοιχεία και εικόνες απ' την μια στην άλλη πραγματικότητα.

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Συνολικά είναι εμφανές ότι το ανοιχτό πρόβλημα δεν είναι μονάχα ένα χρήσιμο εκπαιδευτικό εργαλείο αλλά και ένα αναπόσπαστο κομμάτι των μαθηματικών στο οποίο δεν δίνεται η ανάλογη σπουδαιότητα. Έλλειψη χρόνου επικαλούνται όλοι. Οι καθηγητές δεν έχουν χρόνο να διαπραγματευτούν ένα ανοιχτό πρόβλημα στην τάξη, οι μαθητές δεν έχουν το χρόνο να σκέφτονται, να φαντάζονται, να δοκιμάζουν δικούς τους τρόπους. Τα Πανεπιστήμια κι αυτά δεν μπόρεσαν να χωρέσουν τα "πάντα" στο αναλυτικό τους πρόγραμμα. Πολλοί όμως εδώ θα είχαν να εκθέσουν αμφιβολίες για το κατά πόσο αυτή η κατεύθυνση που έχει πάρει το εκπαιδευτικό μας σύστημα (και η γενικότερη νοοτροπία που διακατέχει τους μετέχοντες στην εκπαιδευτική διαδικασία) μπορεί να προσφέρει στον άνθρωπο ουσιαστικά και πρακτικά εφόδια για τη ζωή και τη σταδιοδρομία του.

Ζούμε σε μια εποχή που η πληροφορία είναι διαθέσιμη ανά πάσα στιγμή. Τεράστιες βιβλιοθήκες είναι ανοιχτές στον κάθε ενδιαφερόμενο, πληθώρα δεδομένων μπορεί να αντλήσει και να διακινήσει κανείς μέσω του διαδικτύου, ενώ τα γεγονότα και οι εξελίξεις ταξιδεύουν με την ταχύτητα του φωτός απ' τη μια στην άλλη μεριά του πλανήτη. Ποιός λοιπόν ο λόγος συντήρησης μιας τόσο φορμαλιστικής εκπαίδευσης; Μήπως θα 'πρεπε να σκεφτούμε ότι μερικές φορές η φαντασία είναι καλύτερη απ' τη γνώση;

Τα παιδιά περνούν στο σχολείο χρόνια που η φαντασία τους είναι δημιουργική και που οι λειτουργίες της σκέψης εξελίσσονται ταχύτατα. Τα χρόνια αυτά που με κατάλληλη καθοδήγηση είναι αποδεδειγμένο ότι μπορούν για πολλούς ανθρώπους να είναι εξαιρετικά δημιουργικά, η σύγχρονη εκπαίδευση τα αφιερώνει ως επί το πλείστον στην συσσώρευση γνώσεων και στην αναπαραγωγή καθορισμένων δρόμων της σκέψης. Ίσως η τακτική αυτή να είναι κατάλοιπο κάποιων άλλων εποχών, ίσως πάλι να δίνεται περισσότερη σημασία στον όγκο των γνώσεων παρά στο βαθμό κατανόησης και εμβάθυνσης. Σίγουρο πάντως είναι πως η άσκηση της δημιουργικής σκέψης και της φαντασίας δεν είναι καθόλου εύκολο να "διδασχτούν" πόσο μάλλον στα πλαίσια λίγων μηνών ή ετών που ένας καθηγητής αναλαμβάνει την τάξη. Έτσι η ευθύνη εναποτίθεται αόριστα στους γονείς, τους προηγούμενους δασκάλους και καθηγητές, στις πολλές ασχολίες των μαθητών, ή στο ισχύον εκπαιδευτικό σύστημα. Πολλοί πάλι ισχυρίζονται πως ακόμη και ο ίδιος ο ρυθμός της σύγχρονης ζωής κάθε άλλο παρά βοηθάει παρόμοιες ικανότητες να ανελιχθούν.

Δεν είναι όμως αβάσιμη και η άποψη ότι η Παιδεία κατευθύνεται από πολιτειακούς παράγοντες όπως το κράτος ή οι διεθνείς οργανισμοί, αλλά και οικονομικούς. Αυτοί ταυτόχρονα προσπαθούν να επέμβουν στην εκπαίδευση προσαρμόζοντας έτσι την κοινωνία στις απαιτήσεις τους. Δεν χρειάζονται πάρα πολλοί επιστήμονες, ούτε ελεύθεροι άνθρωποι που αμφισβητούν και εξετάζουν, ούτε η φαντασία και η αυτόνομη σκέψη βοηθούν στην κατανάλωση ή την υποταγή στη πολιτική γραμμή του κράτους. Το σχολείο λειτουργεί ως μικρογραφία της κοινωνίας και η κοινωνία δεν βασίζεται στην φαντασία και τη σκέψη, αλλά πολύ περισσότερο στο συμφέρον και τις εύκολες λύσεις.

Παρ' όλ' αυτά θα πρέπει μάλλον να παραδεχτούμε πως τούτο που χρειάζεται περισσότερο αλλά και δύναται να ανατρέψει τις δυσμενείς συνθήκες είναι το ενδιαφέρον και η δουλειά από μαθητές, καθηγητές και γονείς. Ωστόσο την απάντηση των καθηγητών πως δεν έχουν τα κατάλληλα εφόδια να διαπραγματευτούν ένα ανοιχτό πρόβλημα θα πρέπει ίσως να την εκλάβουμε σαν μιά έκκληση στην ευρύτερη πανεπιστημιακή κοινότητα, και στην ηγεσία του κράτους για ουσιαστικότερη εκπαίδευση, επιμόρφωση και βοήθεια μέσω κατάλληλου εκπαιδευτικού υλικού.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

P.J. Davis, R. Hersh *Η Μαθηματική Εμπειρία*, τροχαλία

Imre Lakatos. *Proofs and Refutations*.

J. Worrall and E. Zahar, Cambridge

University Press 1978

Εγκυκλοπαίδεια *Δομή*

Πλάτωνα, Σοφιστής Εισαγωγή, Μετάφραση Σχόλια Δ. Γληνού, 1971 Ελληνοευρωπαϊκή κίνηση νέων

Περιοδικό *Ευκλείδης Β'*, τεύχος 29 Ιούλιος - Αύγουστος - Σεπτέμβριος

G. Polya. *HOW TO SOLVE IT, a new aspect of mathematical method*. second edition, Princeton University Press, 1973.

Νεότερον Εγκυκλοπαιδικόν Λεξικόν "Ηλίου"

MAGENTA 1.00 - Εγκυκλοπαιδικό

πολλεξικό βασισμένο στην Εγκυκλοπαίδεια Ευρώπη-Ελλάδα-Κόσμος

Περιοδικό *Ευκλείδης Α'*, κθ. τεύχος 3/42

